המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
מדור בחינות ומערכת שעות

המחלקה להנדסת תוכנה

20/06/21
09:00-12:00

# חישוביות וסיבוכיות

## מועד א'

ד"ר כרים אבו עפאש

תשפ"א סמסטר ב'

**הנחיות חשובות:**

- המבחן ללא חומר עזר וללא מחשבון.
- משך המבחן 3 שעות.
- המבחן מכיל 4 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- פתרו את המבחן תחילה במחברת טיוטה. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות בכתב קריא ומסודר. **בדיקת המבחן לא תביא בחשבון את דפי הטיוטה או תוספות בגב העמוד.**
- בתחילת המבחן, רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- מותר להשתמש במשפטים מהכיתה ומהתרגול, אך יש לציין את הניסוח המדויק של המשפט.
- במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודע" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.

השאלון מכיל 9 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה !

==========

## שאלה 1 (20 נקודות)

נתונות שתי בעיות $A$ ו- $B$ מעל אותו א"ב $\Sigma$, ונתונים שני אלגוריתמי אימות $V_1$ ו- $V_2$ עבור $A$ ו- $B$ (בהתאמה) הרצים בזמן פולינומיאלי.

א) (15 נקודות)

בנו אלגוריתם אימות $V$ עבור הבעיה $A \cap B$.

תארו במלים את האלגוריתם והוכיחו את נכונות הבניה.

הרעיון: V מקבל כקלט זוג (w, y) ורוצה לבדוק האם y היא עדות לכך ש- $w \in A \cap B$.
לצורך כך, V בודק את כל התלוקות האפשריות של y ל- $y_1 y_2$ ומריץ את $V_1$ על $(w, y_1)$ ומריץ את $V_2$ על $(w, y_2)$ ואם שניהם קיבלו, V מקבל, אחרת, V דוחה.

האלגוריתם:

על קלט (w, y), V מבצע
נניח ש $y = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$

1. לכל $1 \le i \le n$
   - V מריץ את $V_1$ על הזוג $(w, \sigma_1, \dots, \sigma_i)$
   - אם $V_1$ מקבל
   - V מריץ את $V_2$ על הזוג $(w, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$
   - אם $V_2$ מקבל ⇐ V מקבל
   - אם $V_2$ דוחה ⇐ V ממשיך בלולאה.
   - אם $V_1$ דוחה
   - V ממשיך בלולאה.
2. V דוחה.

נכונות:

(1ב) אם $w \in A \cap B$ ⇐ $w \in A$ וגם $w \in B$ ⇐ קיימת עדות $y_1$ כך ש- $V_1$ מקבל את הזוג $(w, y_1)$ וגם קיימת עדות $y_2$ כך ש- $V_2$ מקבל את הזוג $(w, y_2)$ ⇐ קיימת עדות $y = y_1 y_2$ כך ש- V מקבל את הזוג $(w, y)$.

(ג) אם $w \notin A \cap B$ $\Leftarrow$ $w \notin A$ או $w \notin B$ $\Leftarrow$ לכל
שני מחרוזות $y_1$ ו- $y_2$, $V_1$ פותח את הצוק $(w, y_1)$ או
$V_2$ פותח את הצוק $(w, y_2)$ $\Leftarrow$ לכל עבור $y = y_1 y_2$, $V$
פותח את הצוק $(w, y)$.

ב) (5 נקודות)
האם האלגוריתם שבניתם רץ בזמן פולינומיאלי? הסבירו.

נסמן $P_1$ הפולינום של $V_1$
ונסמן $P_2$ הפולינום של $V_2$.
אז זמן הריצה של $V$ חסום ע"י

$$O(|y| \cdot (P_1(|w|) + P_2(|w|)))$$

ומכיוון שאורך של $y$ פולינומיאלי ב- $|w|$, כלומר
$|y| = O(|w|)$, זמן הריצה של $V$ הוא פולינומיאלי
ב- $|w|$.

## שאלה 2 (40 נקודות)

לכל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם הטענה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
הסבירו בקצרה את קביעתכם. **אין ניקוד על תשובה נכונה ללא נימוק!**

א) (8 נקודות) אם $L_1 \le L_{acc}$ וגם $L_2 \le L_{acc}$, אזי $(L_1 \setminus L_2) \le L_{acc}$.

לא נכון:
כדוגמא נגדית: $L_1 = \Sigma^*$ , $L_2 = L_{acc}$ .
אזי $\Sigma^* \le L_{acc}$
פונקציית הרדוקציה: לכל $x \in \Sigma^*$ : $f(x) = \langle M_{\Sigma^*}, \langle \varepsilon \rangle \rangle$.
וגם $L_{acc} \le L_{acc}$
פונקציית הרדוקציה: לכל $x \in \Sigma^*$ : $f(x) = x$ .
אבל $L_1 \setminus L_2 = \overline{L_{acc}}$ ולא קיימת רדוקציה $\overline{L_{acc}} \le L_{acc}$
כי, אחרת לפי משפט הרדוקציה, $\overline{L_{acc}} \in RE$, וזו סתירה.

ב) (8 נקודות) לכל מכונת טיורנג $M$, אם $L(M) \in R$, אזי $M$ עוצרת על כל קלט.

לא נכון:
כדוגמא נגדית: $M = M_{loop}$ מ"ט שלא עוצרת על אף קלט.
אזי $L(M_{loop}) = \emptyset \in R$, אבל $M_{loop}$ לא עוצרת על כל קלט.

ג) (8 נקודות) קיימת רדוקציה מ- $\overline{SAT}$ ל- $L_{acc}$.

נכון: מכיוון ש- $NPC \subset R$ ו- $SAT \in NP$ אזי $SAT \in R$.
ולכן, מכיוון ש- R סגורה תחת משלים, מתקיים $\overline{SAT} \in R$ ולכן קיימת מ"ט המכריעה את $\overline{SAT}$, ולכן ניתן לבנות בצורה סופית האם $x \in \overline{SAT}$ לכל $x \in \Sigma^*$.
ואז, אם $x \in \overline{SAT}$, נחזיר $f(x) = \langle M_{\Sigma^*}, \langle \varepsilon \rangle \rangle \in L_{acc}$
ואם $x \notin \overline{SAT}$, נחזיר $f(x) = \langle M_{\emptyset}, \langle \varepsilon \rangle \rangle \notin L_{acc}$

ד) (8 נקודות) $\overline{L_{acc}} \setminus \overline{L_{halt}} \in RE$.

נכון: $\overline{L_{acc}} \setminus \overline{L_{halt}} = \{\langle M\rangle, \langle w\rangle :$ M דוחה את w $\}$

שפה זו שייכת ל- RE כי ניתן לבנות עבורה מ"ט M' באופן הבא:

על קלט x, M' מבצעת

1. בודקת האם $x = \langle M\rangle, \langle w\rangle$. אם לא ⇐ דוחה.

2. מדמה את M על w.

• אם M מקבלת ⇐ M' דוחה.

• אם M דוחה ⇐ M' מקבלת.

ה) (8 נקודות) קיים אלגוריתם המקבל כקלט גרף לא מכוון $G$ ומכריע בזמן פולינומיאלי האם $G$ מכיל קליקה בגודל 5.

נכון: ניתן לבנות אלגוריתם שיבדוק את כל האפשרויות לבחירת 5 קודקודים מתוך V ועבור כל אפשרות, יבדוק האם המשת הקודקודים מהווים קליקה ב- G, ויחזיר תשובה בהתאם לצורך.

מספר האפשרויות לבחירת 5 קודקודים מתוך V שווה $O(|V|^5)$

וזמן הבדיקה לכל 5 קודקודים תסום ל- $O(|V|)$.

ולכן האלגוריתם רץ בזמן פולינומיאלי.

## שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות:

א) (10 נקודות)
המחלקה *CO-RE* סגורה תחת חיתוך.

נראה כי לכל שני שפות $L_1 \in CO\text{-}RE$, $L_2 \in CO\text{-}RE$
מתקיים $L_1 \cap L_2 \in CO\text{-}RE$.

מכיוון ש- $L_1 \in CO\text{-}RE$, מתקיים $\overline{L_1} \in RE$.
ומכיוון ש- $L_2 \in CO\text{-}RE$, מתקיים $\overline{L_2} \in RE$.

ומכיוון ש- RE סגורה תחת איחוד, מתקיים $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in RE$

ולכן $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2 \in CO\text{-}RE$

לפי דה-מורגן

ב) (10 נקודות)

לכל שתי בעיות $A$ ו- $B$, אם $A \leq_P B$ וגם $B \in NP$, אזי $A \in NP$.

שאלה זו היתה בעמוד הבית.

## שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה השפה הבאה: $L=\{<M_1>,<M_2>,<w> \ : \ w\in\left(L(M_1)\cup L(M_2)\right)\}$..

א) (8 נקודות) הוכיחו כי $L\in RE$.

נבנה מ"ט M המקבלת את L.
על קלט x, M מבצעת:
1. בודקת אם $x=<M_1>,<M_2>,<w>$. אם לא ⇐ דוחה.
2. מדמה המקבילי את $M_1$ ו- $M_2$ על w
• אם $M_1$ מקבלת ⇐ M מקבלת
• אם $M_2$ מקבלת ⇐ M מקבלת
• אם $M_1$ ו- $M_2$ דוחות ⇐ M דוחה.

נכונות:
(א) אם $x\in L$ ⇐ $x=<M_1>,<M_2>,<w>$ וגם $w\in L(M_1)\cup L(M_2)$
⇐ $w\in L(M_1)$ או $w\in L(M_2)$ ⇐ $M_1$ מקבלת את w או $M_2$
מקבלת את w ⇐ M מקבלת את x.

(ב) אם $x\notin L$ ⇐ שתי אפשרויות
• $x\neq<M_1>,<M_2>,<w>$ ⇐ M דוחה את x.
• $x=<M_1>,<M_2>,<w>$ וגם $w\notin L(M_1)\cup L(M_2)$ ⇐ $w\notin L(M_1)$ וגם
$w\notin L(M_2)$ ⇐ $M_1$ לא מקבלת את w וגם $M_2$ לא מקבלת את w
⇐ M לא מקבלת את x.

ב) (12 נקודות)

הוכיחו כי $L \notin R$ ע"י רדוקציה מ- $L_{acc}$.

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x)=\begin{cases} \langle M\rangle,\langle M\rangle,\langle w\rangle & : x=\langle M\rangle,\langle w\rangle \\ \langle M_\emptyset\rangle,\langle M_\emptyset\rangle,\langle \varepsilon\rangle & : x\neq\langle M\rangle,\langle w\rangle \end{cases}$$

כאשר $M_\emptyset$ מ"ט הדוחה כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

1. $f$ חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע של $\langle M_\emptyset\rangle,\langle M_\emptyset\rangle,\langle \varepsilon\rangle$, ואם כן, תחזיר $\langle M\rangle,\langle M\rangle,\langle w\rangle$.

2. נראה כי $x\in L_{acc} \iff f(x)\in L$.

(א) אם $x\in L_{acc} \Rightarrow x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ! $\Rightarrow w\in L(M)$

$f(x)=\langle M\rangle,\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ואם $w\in L(M)\cup L(M) \Rightarrow f(x)\in L$.

(ב) אם $x\notin L_{acc} \Rightarrow$ שני מקרים

- $x\neq\langle M\rangle,\langle w\rangle \Rightarrow f(x)=\langle M_\emptyset\rangle\langle M_\emptyset\rangle,\langle \varepsilon\rangle$ ואם $\varepsilon\notin L(M_\emptyset)\cup L(M_\emptyset)$ $\Rightarrow f(x)\notin L$.
- $x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ואם $w\notin L(M) \Rightarrow f(x)=\langle M\rangle,\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ואם $w\notin L(M)\cup L(M) \Rightarrow f(x)\notin L$.

לסיכום, הראינו רדוקציה $L_{acc}\leq L$ ומכיוון ש- $L_{acc}\notin R$, ממשפט הרדוקציה, מתקיים $L\notin R$.